数理解析研究所講究録
493巻 1983年 7-19

Notes on Finite Determinacy of Formal Vector Fields

都立大 理　市川文男 (Ichikawa Fumio)

§0 前書き

finite determinacyの問題はC^∞-map germsに対しR.Thomにより[7]において提起され、J.Matherにより解決された。その後も多くの数学者の研究対象になり、現在我々はその様子をWallのsurvey[14]の中に見い出すことが出来る。ベクトル場の特異点に関して、位相型についてはHartmanの定理、Takensの仕事が、C^∞ linearizationに関してはSternbergの定理がよく知られている。C^∞-vector field germの特異点のfinite determinacyをmap germsと同様に定義して、finitely determinedであるための必要十分条件を問題としたい。以下で我々は形式的ベクトル場を扱う。C^∞-vector field germでの問題は、まず形式的座標変換により標準形X (formalにk-detならばk-次のpolynomial vector field)に変換して、次に任意のflat vector field X_∞ (∞-jet$=0$となるもの)をつけ加えた$X+X_\infty$がXにC^∞-local diffeoで変換できることを示すのが常套手段である。従って形式的ベク

トル場での話は、C^∞-vector field germ への first step である。

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする。$\mathcal{F}$ を形式的巾級数環 $\mathbb{K}[[x_1,\cdots,x_n]]$ とする。形式的ベクトル場 X とは $\mathcal{F}$ の derivation の事である。$\mathcal{X}^0$ を定数項のない形式的ベクトル場全体の集合とする。i.e. $\mathcal{X}^0=\{X: X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|\geq 1} a_{i\alpha}x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}\}$. $\mathcal{X}^0$ に自然に、リー環の構造が入る。$\mathcal{X}^0\ni X, Y$ に対し、リー積 $[X,Y]$ を $[X,Y]=XY-YX$ で定義する。J^k を定数項のない degree k の polynomial vector fields の集合とし、$j^k: \mathcal{X}^0\to J^k$ を degree k までの部分を対応させる写像とする。G を形式的座標変換（$\mathcal{F}$ の alg auto）全体のなす群とする。G は $\mathcal{X}^0$ に次で作用している。$\varphi_* X=\varphi^{-1}X\varphi$ ただし $\varphi\in G$ $X\in\mathcal{X}^0$　$\mathcal{X}^0\ni X, Y$ が同値であるとは、X の G-orbit の中に Y が含まれている時いう。X が k-determined であるとは、$j^kX=j^kY$ となる任意の $Y\in\mathcal{X}^0$ に対し、X と Y が同値になることである。X が finitely determined であるとは、ある k が存在して、X が k-determined になることである。

1-jet $X_1=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し、$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を (a_{ij}) の固有値とする。$\mathbb{Z}_+$ で非負整数の集合を表わす。$K(X_1)=\{(\mu_1,\cdots\mu_n)\in\mathbb{Z}_+^n: \mu_1\lambda_1+\cdots+\mu_n\lambda_n=0\}$ とする。

定義 (1) 1-jet X_1 が strong eigenvalue condition (S.E.C と略す) をみたすとは $K(X_1)=\{(0,0,\cdots,0)\}$ となることである。

(2) 1-jet X_1 が weak eigenvalue condition (W.E.C. と略す) をみたすとは、ある $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ が存在して $K(X_1)=\{r\alpha: r=0,1,2,\cdots\}$ となることである。

<u>定理1</u>　Xの1-jetがS.E.Cをみたす時 Xはfinitely determinedである。

<u>定理2</u>　Xの1-jetがW.E.Cをみたし S.E.Cをみたさない時 次は同値である。

① Xはfinitely determined.

② $X|_{\mathcal{H}} \neq 0$　ただし $\mathcal{H} = \ker\{X^s : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}\}$ で X^sは$X : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$のsemi-simple part.

<u>定理3</u>　Xの1-jetがW.E.Cをみたさない時 Xはfinitely determinedではない。

[3]において、定理1,3と条件をつけた形で定理2を証明した。以下で定理2 ②⇒① の概略と、実2次元での分類について述べたい。

§1 標準形とは何か.

次の標準形定理はよく知られている([10]参照)。簡単のため $\mathbb{K} = \mathbb{C}$とし、$\mathcal{X}^0 \ni X$の1-jet X_1はJordan標準形になっているとする。

<u>定理</u>　$\mathcal{X}^0 \ni X$を上のものとする時、ある形式的座標変換$\varphi \in G$が存在して

$$\varphi_* X = X_1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\langle \mu, \lambda \rangle = \lambda_i \\ |\mu| \geq 2}} a^i_\mu x^\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (*)$$

と出来る。但し $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は X_1の固有値で $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $\langle \mu, \lambda \rangle = \mu_1 \lambda_1 + \cdots + \mu_n \lambda_n$, $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n$ である。

<u>注意</u>　(*)の形のものを標準形という。標準形にあらわれる高次の項はリー積に関して $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ と可換なものである。(*)で与えられる形式的ベクトル場の"semi-simple part"は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ である。

上の定理の直接な系として我々は形式的ベクトル場のSternbergの線形化定理をえる

系　$\mathcal{X}^0 \ni X$ の 1-jet X_1 の固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とする。$|\mu| \geq 2$ なる任意の $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\langle \mu, \lambda \rangle \neq \lambda_i$ $(i=1,\cdots,n)$ ならば ある $\varphi \in G$ が存在して $\varphi_* X = X_1$ となる。

(1.1) 系の言っている意味をもう少し見てみよう。$\mathcal{F}$ の無限次元ベクトル空間の base を degree 順に $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \quad , x_n^2, \cdots \rangle$ をとり $X:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ の無限行無限列の行列表現を考える。簡単のため 1-jet は $\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ の対角形をしているとする。容易にわかるように linear map $X:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ は次で表わされる。

$$
\begin{array}{l}
\text{1-jet} \\
\text{2-jet}
\end{array}
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{matrix} & & & \\
\hline
* & \begin{matrix} 2\lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\lambda_n \end{matrix} & & \\
\hline
* & * & \begin{matrix} 3\lambda_1 & & & 0 \\ & 2\lambda_1+\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 3\lambda_n \end{matrix} & \\
\hline
* & * & * & \begin{matrix} 4\lambda_1 & & \\ & 3\lambda_1+\lambda_2 & \\ & & \ddots \end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{matrix} \\ 0 \\ \\ \end{matrix}
$$

形式的座標変換 φ も同様な擬下三角な無限行列で表示できる。従って形式的ベクトル場の標準形とは、上のような無限行列の標準形ともみなせるのである。上の場合regionの条件とは、いつ対角化可能なのかを意味している。

(1.2) 標準形(*)は 1-jet を変化させると、即ち $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を少し変化させただけで出てくる高次の項が激しく変動するのであるが、1-jet を固定する deformation の中で考えれば、(*)は一般には無限個のパラメタ $\{a^i_\alpha\}$ をもつ X_1 の "universal unfolding" であるとみなせる。

(1.3) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ の場合、上の標準形定理は何も主張したことにならない。その場合には Takens の標準形定理 [12] がある。

§2 N.E.C と W.E.C.

<u>定義</u> 1-jet X_1 が <u>nice eigenvalue condition</u> (N.E.C と略す) をみたすとは X_1 が W.E.C をみたし、かつ 次が成立つときいう。$\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_p$ を X_1 の相異なる non-zero 固有値としたとき、$\beta_1\hat{\lambda}_1 + \cdots + \beta_p\hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_j$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_+$ $(i=1,\cdots,p)$ と表わせたとすると $\beta_j > 0$。

今 $\mathcal{X}^0 \ni X$ を 1-jet X_1 が N.E.C をみたすとする。簡単のため X_1 の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は相異なると仮定し $K(X_1) = \{ r\alpha : r = 0, 1, 2, \cdots \}$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ をとる。この時 X の標準形として次がとれる。

$$X_1 + \sum_i a^1_i x^{i\alpha} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_i a^n_i x^{i\alpha} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (**)$$

標準形にあらわれる高次の項は、次数 $(i|\alpha|+1)$ の時だけであり、しかもその次数で n 個の

項しかあらわれないのである。nice の意味はここにある。$\mathcal{H}=\ker\{X^s:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}\}$ は $\mathbb{K}[[x^\alpha]]$ で与えられ、次が容易にわかる。

$$X|_{\mathcal{H}}\neq 0 \iff \text{ある } L \text{ が存在して } a_L^1\alpha_1+\cdots+a_L^n\alpha_n\neq 0$$

$G(m)=\langle x^{m\alpha}x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,x^{m\alpha}x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\rangle_{\mathbb{K}}$ とおき、(**)を

$$X_1+X_{(L)}+X_{(L+1)}+\cdots,\quad X_{(j)}\in G(j)\quad (j\geq L)$$

で表わす。さらに簡単のため、$X_{(L)}$ の係数が条件 $a_L^1\alpha_1+\cdots+a_L^n\alpha_n\neq 0$ をみたしているとする。$X_{(L)}$ は linear map $[X_{(L)},-]:G(m)\to G(m+L)$ をひきおこし [2] で示したように $m=L$ 以外では $[X_{(L)},-]:G(m)\to G(m+L)$ は surjective となっている。

補題 (Takens) $\mathfrak{X}^0\ni X,Y$ に対し、$j^1Y=0$、$j^k([X,Y])=0$ とすると

$$j^{k+1}(\exp Y)_*X=j^{k+1}(X+[X,Y])\qquad\text{（証明略）}$$

今 $G(L+1)\ni Y_{(L+1)}$ を $[X_{(L)},Y_{(L+1)}]=-X_{(2L+1)}$ となるようにとる。$(\exp Y_{(L+1)})_*X$ が標準形になることが容易にわかり、上の補題から $(\exp Y_{(L+1)})_*X$ は次の形をしている

$$X_1+X_{(L)}+X_{(L+1)}+\cdots+X_{(2L)}+X'_{(2L+2)}+X'_{(2L+3)}+\cdots$$

次に $G(L+2)\ni Y_{(L+2)}$ を $[X_{(L)},Y_{(L+2)}]=-X'_{(2L+2)}$ となるようにとると $(\exp Y_{(L+2)})_*(\exp Y_{(L+1)})_*X$ は $X_1+X_{(L)}+\cdots+X_{(2L)}+X''_{(2L+3)}+\cdots$ となる。以下帰納的に $Y_{(L+3)},Y_{(L+4)},\cdots$ をとり $\varphi=\varprojlim_{j}(\exp Y_{(L+1)})\circ(\exp Y_{(L+2)})\circ\cdots\circ(\exp Y_{(L+j)})$ とおくと、$\varphi\in G$ であり $\varphi_*X=X_1+X_{(L)}+\cdots+X_{(2L)}$ とすることができる。

形式的ベクトル場 Y が X と同じ $(2L|\alpha|+1)$-jet をもつとすると、最初から Y も標準形になっていると仮定してよく、上と全く同じ操作で $(2(L+1)|\alpha|+1)$ 次以上の項を帰納的に消すことができ、結局同じ標準形 $X_1+X_{(L)}+\cdots+X_{(2L)}$ と同値になる。従って X は $(2L|\alpha|+1)$-determined である。以上が N.E.C の場合の定理2 ②⇒① の証明の概略である。

W.E.Cをみたし N.E.Cをみたさない例を考えよう。$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (1, -1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}, 3+\sqrt{2}+\sqrt{3}, \cdots)$ とする。明らかにW.E.Cはみたすが、例えば $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は次のような他の固有値の正整数一次結合で表わせる。

$$2\cdot(1)+(\sqrt{2})+(\sqrt{3}),\ (1)+(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}),\ 2(1)+2(\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

さらに嫌な例はいくらでも作り出せるだろう。一般にW.E.Cをみたすだけでは、標準形にあらわれる高次の項のdegreeにバラつきが生じ、そのdegreeにあらわれる項の数も変動しだすおそれがある。さらに上の例では、1, −1 以外の固有値の重複度は1でなくともW.E.C.をみたす。W.E.Cをみたすとき、標準形を書下すこと、ましてリー積の計算など、どう処理すればよいのか? 実は、簡単な事実に気づけばこうした問題はアッサリと解決できるのである。

$\mathbb{Z}_+^n$ に次で順序 $\leqq$ を定義する。$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n),\ \nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ に対し $\mu\leqq\nu$ とは、各 $i=1,\cdots,n$ に対し $\mu_i\leqq\nu_i$ となることである。

<u>補題</u> $\mathbb{Z}_+^n$ の任意の部分集合 S に対して、S の極小元は有限個である。(証明略)

さて、ベクトル場 X の 1-jet X_1 を簡単のため対角形 $\lambda_1 x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_n x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ とし、X_1 はW.E.Cをみたし、S.E.Cをみたさないとする。$K(X_1)=\{r\alpha : r=0,1,2,\cdots\}$ となる $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ をとる。$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,0,\cdots,0)$ $\alpha_i\neq 0\ (i=1,\cdots,k)$ としよう。$S_j=\{\mu\in\mathbb{Z}_+^n : \langle\mu,\lambda\rangle=\lambda_j\}$ $(j=k+1,\cdots,n)$ とおき、S_j の極小元を $\delta_1^j,\cdots,\delta_{r_j}^j$ とすると、

S_j の任意の元は $\delta_r^j+m\alpha$ の形をしている $(m=0,1,2,\cdots,\ 1\leqq r\leqq r_j)$

従って X の標準形として次を得る。

$$X_1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^1 x^{m\alpha} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^k x^{m\alpha} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{*=1}^{r_{k+1}} b_m^{k+1,*} x^{m\alpha+\gamma_*^{k+1}} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{*=1}^{r_n} b_m^{n,*} x^{m\alpha+\gamma_*^{n}} \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (***)$$

但し、$|\gamma_*^j|=1$ のとき $b_0^{j,*}=0$。X が $(***)$ で与えられた時 $\mathcal{H}=\mathbb{K}[[x^\alpha]]$ で

$X|_{\mathcal{H}} \neq 0 \Leftrightarrow$ ある L が存在して $a_L^1\alpha_1+\cdots+a_L^k\alpha_k \neq 0$

がわかる。さて $G(0)$ を $\{x^{\gamma_*^j}\frac{\partial}{\partial x_j} : 2 \leqq |\gamma_*^j| < |\alpha|+1\}$ で張られるベクトル空間、$G(m)$ $(m=1,2,\cdots)$ を $\{x^{m\alpha}x_i\frac{\partial}{\partial x_i} : i=1,\cdots,k\} \cup \{x^{m'\alpha+\gamma_*^j}\frac{\partial}{\partial x_j} : j=k+1,\cdots,n,$ $m|\alpha|+1 \leqq m'|\alpha|+|\gamma_*^j| < (m+1)|\alpha|+1\}$ で張られるベクトル空間とする。

今簡単のため、$(***)$ で与えられた X は、$X_1+X(L)+X(L+1)+\cdots$　$X(j) \in G(j)$, $j=L, L+1, \cdots$ の形をしているとし、$X(L)$ の係数で条件 $a_L^1\alpha_1+\cdots+a_L^k\alpha_k \neq 0$ がみたされていると仮定する。

今 $r=\max\{|\gamma_*^j| : j=k+1,\cdots,n,\ *=1,\cdots,r_j\}$, $M_0=\min\{m \in \mathbb{Z}_+ : r < m|\alpha|+1\}$ とおくと、$M_0 \leqq m$ なる任意の m に対し $\dim G(m) = \left(\sum_{j=k+1}^{n} r_j\right)+k$ となる。Jacobi の恒等式と次数の比較から $[X(L), -]$ は $G(m)$ から $G(m+L) \oplus G(m+L+1)$ への線形写像をひきおこす。$\pi_{m+L} : G(m+L) \oplus G(m+L+1) \longrightarrow G(m+L)$ projection とする。簡単な計算から、ある $M \geqq M_0$ が存在して任意の $m \geqq M$ に対し $\pi_{m+L}\circ[X(L), -] : G(m) \longrightarrow G(m+L)$ が surjection になることが示せる。後は N.E.C の場合と全く同様の論法を使い、高次の項を次々に消して polynomial vector field に同値になることを示し証明は終る。

§3 分類

定理2の証明の概略からわかるようにベクトル場のfinite determinacyの証明は逐次標準形に直して行き、最終的にpolynomial vectorfieldまでもちこむのである。言いかえれば、分類（＝標準形）とfinite determinacyの決定を同時進行させているのである。実2次元の場合に、これを忠実に実行してゆくと次のような結果をえる。証明は[5]を見てもらいたい。

実2次元の場合W.E.Cをみたし、SECをみたさないのは次の場合のみである。(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ (ii) $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq 0$ $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$ (iii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$

<u>定理3.1</u> $\mathcal{X}^0 \ni X$ の1-jet X_1 が $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1/\lambda_2 = -q/p$ (p, qは互いに素な正整数）であるとき Xは次のいずれかと同値である

(1-1). $X_1 + \delta \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (b_k \omega^k + b_{2k} \omega^{2k}) y \frac{\partial}{\partial y}$ $\quad (b_k \neq -(p/q)\delta)$

(1-2) $X_1 + \delta q \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + (\delta(-p)\omega^k + b_L \omega^L + \quad + b_{2L-k}\omega^{2L-k} + b_{2L}\omega^{2L}) y \frac{\partial}{\partial y}$

$(b_L \neq 0,\ L > k)$

(1-3) $X_1 + \delta q \omega^k x \frac{\partial}{\partial x} + \delta(-p)\omega^k y \frac{\partial}{\partial y}$

(1-4) X_1

但し、$\omega = x^p y^q$, k evenのとき $\delta = \pm 1$ k oddのとき $\delta = 1$ とする。

<u>定理3.2</u> $\mathcal{X}^0 \ni X$ の1-jet X_1 が $\theta x \frac{\partial}{\partial y} - \theta y \frac{\partial}{\partial x}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$ であるとき、Xは次のいずれかと同値である

(2-1) $X_1 + (\delta r^k + a_{2k} r^{2k})(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + b_k r^k (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$

(2-2) $X_1 + (a_L r^L + \cdots a_{2L-k} r^{2L-k} + a_{2L} r^{2L})(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + \delta r^k (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$

$(a_L \neq 0,\ L > k)$

(2-3) $X_1 + \delta r^k \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

(2-4) X_1

但し. $r = x^2+y^2$, $\delta = \pm 1$。

<u>定理 3.3</u>　Xの1-jet X_1が $\lambda_1 x\frac{\partial}{\partial x}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$ のとき Xは次のいずれかと同値.

(3-1) $X_1 + a_k x y^k \frac{\partial}{\partial x} + (\delta y^k + b_{2k} y^{2k}) y\frac{\partial}{\partial y}$

(3-2) $X_1 + \delta x y^k \frac{\partial}{\partial x} + (b_L y^L + \cdots + b_{2L-k} y^{2L-k} + b_{2L} y^L) y\frac{\partial}{\partial y}$. $(b_L \neq 0,\ L > k)$

(3-3) $X_1 + \delta x y^k \frac{\partial}{\partial x}$

(3-4) X_1

但し. kが even のとき $\delta = \pm 1$. k odd のとき $\delta = 1$

<u>定義</u>　$\mathcal{X}^0 \supset S$ が<u>semi-algebraic set</u> (resp. <u>submanifold</u>) であるとは. 任意のkに対し $j^k S$が J^kの semi-algebraic set (resp submanifold) になる時いう。

<u>定義</u>　$\mathcal{X}^0 \supset M$ を submfd とするとき. Mの$\mathcal{X}^0$における<u>codimension</u> $\tau(M)$を $\tau(M) = \lim_{k} \tau_k(j^k M)$ で定義する。但し $\tau_k(j^k M)$は. J^kにおける $j^k M$ の codimension.

<u>定義</u>.　$\mathcal{X}^0$ に $\{j^k : \mathcal{X}^0 \to J^k\}_{k=1,2,\ldots}$ から induce される topology を与えておく。2つの sub mfds M, N に対し. MがNに<u>接接</u>しているとは. Mの閉包が Nを含むことである。記号 $M \leftarrow N$ で この接接関係をあらわす。

さて，A_{kk}，A_{kL}，$A_{k\infty}$，$A_{\infty\infty}$ を次で定義する。

$A_{kk}=\{X\in\mathcal{X}^0 : X$ は (1-1) の形と同値なもの$\}$　$A_{kL}=\{X\in\mathcal{X}^0 : X$ は (1-2)の形と同値$\}$

$A_{k,\infty}=\{X\in\mathcal{X}^0 : X$ は (1-3) の形と同値$\}$　$A_{\infty\infty}=\{X\in\mathcal{X}^0 . X$ は (1-4) と同値$\}=GX_1$

同様に定理3.2 (2-1), (2-2), (2-3)(2-4) (resp. 定理 3.3 (3-1),(3-2),(3-3)(3-4)) に対応するものを B_{kk}，B_{kL}，$B_{k\infty}$，$B_{\infty\infty}$ (resp C_{kk}，C_{kL}，$C_{k\infty}$，$C_{\infty\infty}$) とすると次を得る

<u>定理3.4</u>　A_{kL}，B_{kL}，C_{kL} $(1\leqq k\leqq L\leqq\infty)$ は $\mathcal{X}^0$ の semi-alg submfds で $\tau(A_{kL})=\tau(B_{kL})=\tau(C_{kL})=k+L$ で $\{A_{kL}\}_{1\leqq k\leqq L\leqq\infty}$ の隣接関係は次で与えられる。

$$
\begin{tikzcd}
A_{11} & A_{12} \arrow[l] & A_{13} \arrow[l] & A_{14} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & A_{1\infty} \arrow[l] \\
& A_{22} \arrow[u] & A_{23} \arrow[l] \arrow[u] & \cdot \arrow[l] \arrow[u] & \cdots & A_{2\infty} \arrow[l] \arrow[u] \\
& & A_{33} \arrow[u] & \cdot \arrow[l] \arrow[u] & \cdots & A_{3\infty} \arrow[l] \arrow[u] \\
& & & \ddots & \cdots & \vdots \arrow[u] \\
& & & & \cdots & A_{\infty\infty} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\{B_{kL}\}$，$\{C_{kL}\}$ についても同様の隣接関係がある。

<u>注意</u>　各 A_{kL}，B_{kL}，C_{kL} は高々4つの connected component をもつ．B_{kL} C_{kL} の場合は各 component で位相型が異なることがある ([12] 参照)　$(\mathbb{R}^2,0)$ での C^∞-vector field germ を C^∞-equivalence より弱い同値関係で分類したものに，Bogdanov [1]，Takens [13] がある。

§4. 終りに.

形式的ベクトル場の場合も関数の場合と同様 finitely determined であることと G-orbit の codimension が有限であることが同値となるのであるが，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{X}^0$ での G-orbit の様相はまるでちがうのである。例えば実2次元の場合 1-jet の固有値 λ_1, λ_2 が $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1\lambda_2 < 0$ の時 λ_1/λ_2 が有理数であるか，無理数であるかによって k-determinacy の k が激しく変動する。関数の場合の universal unfolding theorem とは結局 $\mathcal{F}$ の中での G-orbit に対する陰函数定理であると割切って考えれば，それが成立つ鍵は k-determined function f のまわりでの G-orbit の様子が k-jet space でのそれに帰着できることにある。ベクトル場の場合 k-determinacy の k に関する upper semi-continuity が成立たず，unfolding theorem は一般には期待できない。

関数の場合の finite determinacy はそれ自体興味深いのであるが，unfolding theory，Thom の初等カタストロフィー，Arnol'd の simple singularity，Lie 理論との関係，$K(\pi,1)$ の問題など非常に豊かな数学的副産物をもたらした。ベクトル場の finite determinacy には副産物があるのだろうか？ 全くないのかもしれない，筆者にはわからない。

REFERENCES

[1] R.I. Bogdanov : Modules of C^∞-orbital normal forms for singular points of vector fields on a plane , Funct. Anal and its appl 11 , 47-49 (1977)

[2] F. Ichikawa : Notes on finitely determined singularities of formal vector fields, 数理研講究録 403 (1980)

[3] F. Ichikawa : Finitely determined singularities of formal vector fields ; Inv. math 66 199-214 (1982)

[4] F. Ichikawa : On finite determinacy of formal vector fields, to appear in Inv. math.

[5] F. Ichikawa : Classification of finitely determined singularities of formal vector fields on a plane. (preprint)

[6] T. Fukuda, H. Noguchi : 初等カタストロフィ 共立出版 1976

[7] H.I. Levin : Singularities of differentiable mappings, Springer Lecture Notes 192, 1-89. Springer-Verlag 1971

[8] J. Mather : Stability of C^∞ mappings III, Finitely determined map-germs Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968)

[9] E. Nelson : Topics in dynamics I. flows, Math Note Princeton 1969

[10] H. Omori : 無限次元リー群論, 紀伊國屋 1978

[11] S. Sternberg : On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space II, Amer. J. Math 80, 623-632 (1958)

[12] F. Takens : Singularities of vector fields, Publ. Math I.H.E.S 43 (1973)

[13] F. Takens : Normal forms for certain singularities of vector fields. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 23, 163-195 (1973

[14] C.T.C. Wall. Finite determinacy of smooth map-germs, Bull. London Math Soc. 13, 481-539 (1981)